10 - Grundwissensheft - Mathematik - G8
Lösung

Seite 1

1)

a) $p = 8\%$; $a = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

$I(x) = I_0 \cdot 0{,}92^x$; x ist die Tiefe in Meter.

q ist der Anteil der Intensität, der in 7m noch vorhanden ist:

$q \cdot I_0 = I_0 \cdot 0{,}92^7 \quad | : I_0$

$q = 0{,}92^7 \approx 55{,}8\%$

b) $m_0 = 0{,}2g$; $a = 2$;

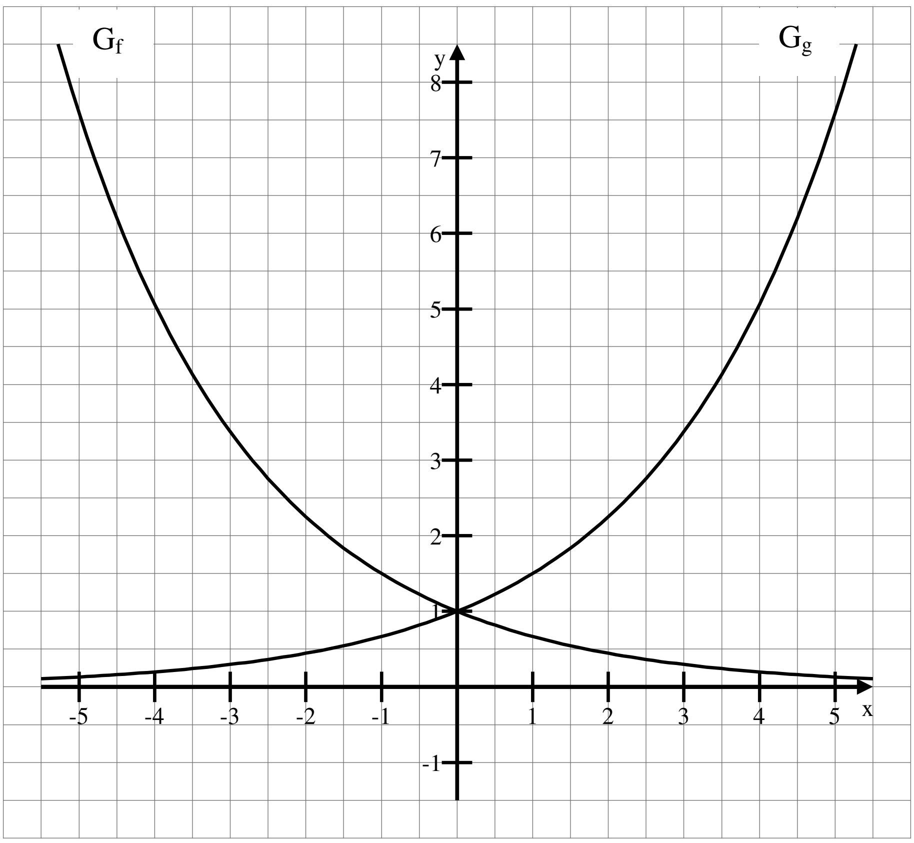
$m(t) = m_0 \cdot 2^t$; t ist die Zeit in Stunden.

$m(24) = 0{,}2g \cdot 2^{24} \approx 3{,}5t$

2)

Wertetabelle

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
f(x)	7,6	5,1	3,4	2,25	1,5	1	0,7	0,4	0,3	0,2	0,13
g(x)	0,13	0,2	0,3	0,4	0,7	1	1,5	2,25	3,4	5,1	7,6



G_f und G_g sind zueinander symmetrisch bezüglich der y-Achse.
Allgemein gilt:

Der Graph von $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ geht aus dem Graphen von $f(x) = a^x$ durch Spiegelung an der y-Achse hervor.

3)

$$\log_{0,5} 5 - \log_{15}\sqrt{15} + \log_{0,5} 6{,}4 = \log_{0,5}(5\cdot 6{,}4) - \log_{15} 15^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \log_{0,5} 32 - \frac{1}{2}\log_{15} 15 = \log_{0,5} 2^5 - \frac{1}{2} = \log_{0,5}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} - \frac{1}{2} =$$

$$= -5\log_{0,5}\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -5 - \frac{1}{2} = -5\frac{1}{2}$$

4)

$$1{,}5\cdot 3^{x+1} = 15\cdot 6^{2x}$$

$$1{,}5\cdot 3^x\cdot 3 = 15\cdot 36^x \quad |:15$$

$$0{,}3\cdot 3^x = 36^x \quad |\lg$$

$$\lg(0{,}3\cdot 3^x) = \lg 36^x$$

$$\lg 0{,}3 + \lg 3^x = x\lg 36$$

$$\lg 0{,}3 + x\lg 3 = x\lg 36 \quad |-x\lg 3$$

$$\lg 0{,}3 = x\lg 36 - x\lg 3$$

$$\lg\frac{3}{10} = x(\lg 36 - \lg 3)$$

$$\lg 3 - \lg 10 = x\lg\frac{36}{3}$$

$$\lg 3 - 1 = x\lg 12 \quad |:\lg 12$$

$$x = \frac{\lg 3 - 1}{\lg 12}; \quad L = \left\{\frac{\lg 3 - 1}{\lg 12}\right\}$$

5a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$x^3 - 3x + 2 = 0$;

mögliche ganzzahlige Lösungen: $\pm 1; \pm 2$

Probieren: $f(1) = 1^3 - 3\cdot 1 + 2 = 0$ $\qquad x_1 = 1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 3x + 2):(x-1) = x^2 + x - 2 \\
-\underline{(x^3 - x^2)} \\
\qquad x^2 - 3x \\
\quad -\underline{(x^2 - x)} \\
\qquad\quad -2x + 2 \\
\qquad -\underline{(-2x + 2)} \\
\qquad\quad ----
\end{array}$$

$x^2 + x - 2 = 0$; $x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 3}{2}$; $x_2 = 1 = x_1$; $x_3 = -2$

Nullstellen: $x_1 = 1$ (doppelte Nullstelle); $x_3 = -2$

$$f(x) = (x-1)^2(x+2)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

5b)

$$f(x)=2x^4+2x^3-16x^2-24x$$

$$2x^4+2x^3-16x^2-24x=0;\quad 2x\left(x^3+x^2-8x-12\right)=0;\quad x_1=0;$$

$$x^3+x^2-8x-12=0;$$

mögliche ganzzahlige Lösungen: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm4; \pm6; \pm12$

Probieren: $f(-2)=(-2)^3+(-2)^2-8\cdot(-2)-12=0;\quad x_2=-2;$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
\left(x^3+x^2-8x-12\right):(x+2)=x^2-x-6\\
\underline{-\left(x^3+2x^2\right)}\\
\qquad -x^2-8x\\
\quad \underline{-\left(-x^2-2x\right)}\\
\qquad\qquad -6x-12\\
\qquad\quad \underline{-\left(-6x-12\right)}\\
\qquad\qquad -----
\end{array}$$

$$x^2-x-6=0$$

$$x_{3/4}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-6)}}{2}=\frac{1\pm5}{2};\quad x_3=3;\quad x_4=-2=x_2$$

Nullstellen: $x_1=0$; $x_2=-2$ (doppelte Nullstelle); $x_3=3$

$$f(x)=2x(x+2)^2(x-3);$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty=\lim_{x\to\infty}f(x).$$

6)

$f_1(x) = 2x^3 + 6$; ganzrationale Funktion;

$f_1(-x) = 2(-x)^3 + 6 = -2x^3 + 6$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_1(x) = \infty$

$f_2(x) = 2{,}5 \sin 3x$; trigonometrische Funktion;

$f_2(-x) = 2{,}5 \sin 3(-x) = -2{,}5 \sin 3x = -f_2(x)$;

G_{f_2} ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_2(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f_2(x) = \infty$ existieren nicht. $f_2(x)$ ist divergent für betragsmäßig große x.

$f_3(x) = 4^x$; Exponentialfunktion;

$f_3(-x) = 4^{-x}$;

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_3(x) = \infty$;

$f_4(x) = \dfrac{5}{x-2}$; gebrochen rationale Funktion;

$f_4(-x) = \dfrac{5}{-x-2}$;

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_4(x) = 0; \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_4(x) = 0$

$f_5(x) = x^4$; Potenzfunktion;

$f_5(-x) = (-x)^4 = x^4 = f_5(x)$;

G_{f_5} ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_5(x) = \infty = \lim\limits_{x \to \infty} f_5(x)$

$f_6(x) = -3x^2 + 6x - 2$; quadratische Funktion;

$f_6(-x) = -3(-x)^2 + 6(-x) - 2 = -3x^2 - 6x - 2$

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_6(x) = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_6(x) = -\infty$

$f_7(x) = -1{,}4x - 9$; lineare Funktion

$f_7(-x) = -1{,}4(-x) - 9 = 1{,}4x - 9$;

Keine Symmetrie zum Koordinatensystem.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f_7(x) = \infty; \quad \lim\limits_{x \to \infty} f_7(x) = -\infty$.

Seite 2

1) $b = 3{,}0\text{ cm};\ \alpha = 60°$

$$b = \frac{\alpha}{180°} \cdot \pi r$$

$$r = b \cdot \frac{180°}{\alpha\pi} = 3{,}0\text{cm} \cdot \frac{180°}{60°\pi} \approx 2{,}9\text{cm}$$

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2 = \frac{60°}{360°} \cdot \pi (2{,}9\text{cm})^2 \approx 4{,}4\text{cm}^2;$$

60° im Bogenmaß: $x = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}0$

2)

a) $$U = \frac{3}{4} \cdot 2\pi r + 8r + 2 \cdot 4\sqrt{2}r - 2r = \frac{3}{2}\pi r + 6r + 8\sqrt{2}r = \left(\frac{3}{2}\pi + 6 + 8\sqrt{2}\right)r$$

$$A = \frac{3}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2} \cdot 8r \cdot 4r = \frac{3}{4}\pi r^2 + 16r^2 = \left(\frac{3}{4}\pi + 16\right)r^2$$

b)

$$O = M_{\text{Kegel}} + A_{\text{Kreisring}} + O_{\text{Halbkugel}} =$$

$$= 2\pi r \cdot 2{,}5r + (2r)^2\pi - r^2\pi + \frac{1}{2} \cdot 4r^2\pi =$$

$$= 5r^2\pi + 4r^2\pi - r^2\pi + 2r^2\pi = 10r^2\pi$$

$$V = V_{\text{Kegel}} - V_{\text{Halbkugel}}$$

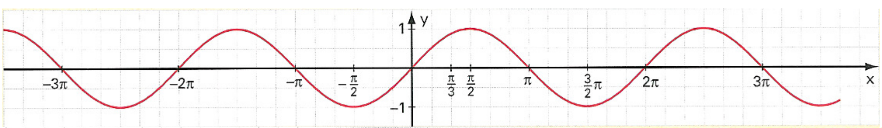
$$h_{\text{Kegel}} = \sqrt{(2{,}5r)^2 - (2r)^2} = \sqrt{2{,}25r^2} = 1{,}5r$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (2r)^2\pi \cdot 1{,}5r - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}r^3\pi =$$

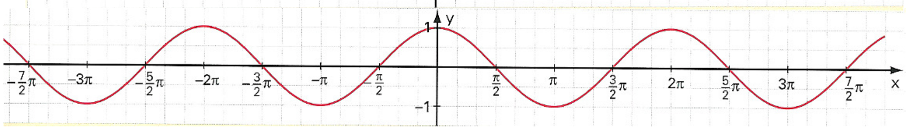
$$= 2r^3\pi - \frac{2}{3}r^3\pi = \frac{4}{3}r^3\pi.$$

3)

Sinuskurve



Kosinuskurve



4)

a) $f(x) = a\cos(bx + c) + d$

Periode 2π: $b = 1$

Keine Verschiebung in x-Richtung: $c = 0$

Amplitude 2; Spiegelung an der x-Achse: $a = -2$

$f(x) = -2\cos x$;

b) $f(x) = a\sin(bx + c) + d$

Periode 4π: $b = \frac{1}{2}$

Verschiebung in y-Richtung um 1: $d = 1$

Keine Verschiebung in x-Richtung: $c = 0$

Amplitude 0,5: $a = 0{,}5$

$f(x) = 0{,}5\sin\left(\frac{1}{2}x\right) + 1$

5)

a)

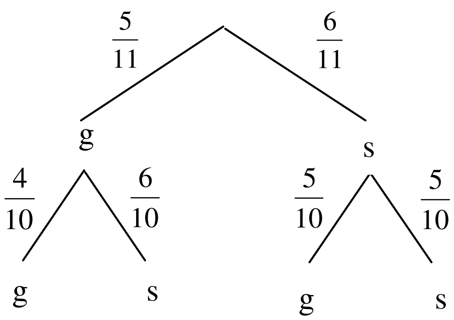
	B	$\overline{B}$	
M	14	22	36
$\overline{M}$	4	10	14
	18	32	50

	B	$\overline{B}$	
M	28%	44%	72%
$\overline{M}$	8%	20%	28%
	36%	64%	100%

b) $P(M \cap B) = 28\%$. Es sind 14 Männer.

c) $P_M(B) = \frac{P(M \cap B)}{P(M)} = \frac{0{,}28}{0{,}72} \approx 39\%$

6)



a) $P(A) = \frac{6}{11} \approx 54{,}5\%$

b) $P(B) = \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} = \frac{2}{11} \approx 18\%$

c) $P(C) = \frac{6}{10} = 60\%$